Ensayos–Volumen XXVIII, núm.2, noviembre 2009, pp. 29-64

Consumo y decisiones de portafolio en ambientes estocásticos: un marco teórico unificador*

Francisco Venegas Martínez[1]
Abigail Rodríguez Nava[2]

Fecha de recepción: 04 IV 2009 Fecha de aceptación: 25 IX 2009

Resumen

En este trabajo se proporciona un marco teórico que presenta de manera consistente el proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista en un ambiente de riesgo e incertidumbre con volatilidad constante. Los procesos de Wiener y Poisson desempeñan un papel esencial en el modelado del riesgo de mercado y la incertidumbre en la política económica. En este contexto, se examinan de manera sistemática diferentes modelos, de equilibrio parcial, que caracterizan el consumo y las proporciones de la riqueza que un consumidor racional asigna a los diferentes activos, disponibles en los mercados financieros (doméstico y extranjero).

Palabras clave: riesgo de mercado, política fiscal, modelación estocástica y decisiones intertemporales del consumidor.

Abstract

This paper is aimed to provide a consistent theoretical framework for the decision making process of a consumer-investor in an environment of risk and uncertainty with constant volatility. In this research, the Wiener and Poisson processes play an essential role in modeling market risk and uncertainty in economic policy. In this context different models of partial

---

* Los autores desean agradecer el trabajo profesional de dos dictaminadores anónimos, sus comentarios y sugerencias mejoraron sustancialmente esta investigación.

[1]Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía.
Dirección: Plan de Agua Prieta No. 66, Col. Plutarco Elías Calles, U.P. "Lázaro Cárdenas" México, D.F.
Correo electrónico: fvenegas1111@yahoo.com.mx
[2]Universidad Autónoma Metropolitana. Departamento de Producción Económica.
Correo electrónico: arnava@correo.xoc.uam.mx

equilibrium that characterize consumption and proportions of wealth that a rational consumer allocates to the distinct assets available in the financial markets (domestic and foreign) are systematically examined.

Keywords: Market risk, fiscal policy, stochastic modeling and consumer's inter-temporal decisions.
JEL Classification: H31, F31, and D91.

Introducción

En la literatura sobre racionalidad económica, desde hace varias décadas, dos preguntas se han planteado con gran insistencia ¿qué hacen y por qué hacen lo que hacen los agentes económicos cuando en su entorno aparecen situaciones de riesgo e incertidumbre? Al respecto, ya desde la década de los sesentas, varias respuestas de diferente naturaleza han sido proporcionadas, entre ellas se encuentran, por ejemplo: Merton (1969 y 1971); Fischer (1975); Dothan (1978); Cox, Ingersoll y Ross (1985); Turnovsky (1993); Grinols y Turnovsky (1994); Venegas Martínez (2001, 2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2008 y 2009), y muchos más. Sin embargo, aún hace falta un marco teórico consistente que conjunte, ordene y extienda en forma sistemática, en cuanto a complejidad y realismo, los diversos modelos sobre decisiones bajo riesgo e incertidumbre y que, al mismo tiempo, ofrezca congruencia entre sus hipótesis y los resultados.

El presente trabajo posee las siguientes características distintivas. Por un lado, proporciona un marco teórico que permite examinar de manera consistente el proceso de toma de decisiones de consumidores-inversionistas (competitivos y adversos al riesgo) en condiciones de riesgo e incertidumbre cuando la volatilidad en los mercados se mantiene constante. Por otro, explica cómo los agentes económicos toman, en el presente, decisiones de mediano y largo plazo sobre consumo y portafolio, aun cuando existe incertidumbre en el rumbo de la política fiscal. Finalmente, modela los saltos extremos e inesperados, que ocasionalmente ocurren, en los precios de los bienes y los activos.

Además de ofrecer un estudio sistemático sobre diversos modelos disponibles en la literatura, ampliando sus alcances, la presente investigación desarrolla, de la manera más general posible, un modelo que arroja varias conclusiones relevantes sobre la toma de decisiones en ambientes de riesgo e incertidumbre, cuando la volatilidad es constante, que son independientes de si la economía está abierta o no: 1) El consumo de los agentes siempre es proporcional al nivel de la riqueza[3]. 2) Las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos son cantidades estacionarias[4]. 3) La imposición futura de un impuesto incierto sobre la riqueza y los saltos en el nivel general de precios no afectan las decisiones sobre la tenencia de saldos monetarios reales; mientras que las decisiones sobre otros activos sí pueden cambiar.

Es importante destacar otra dirección que la investigación sobre decisiones en ambientes de riesgo con volatilidad constante ha tomado, la cual surge con el trabajo seminal de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), quienes aportaron uno de los más grandes avances en la teoría de valuación de opciones, lo cual ha tenido gran influencia en las estrategias que los individuos llevan a cabo para cubrirse contra el riesgo de mercado. Desde entonces, este trabajo ha sido un punto de referencia para el desarrollo de la ingeniera financiera. Por último, con respecto a otros desarrollos sobre modelos con riesgo e incertidumbre, es importante mencionar los trabajos de: Capinski y Zastawniak (2005) y Kim (2003) sobre valuación de derivados y modelos de tasas; Hull (2000) y Nielsen (1999) sobre derivados y cobertura de riesgo de mercado; Ibarra-Valdez (2007) y Shah (1997) sobre el modelo de Black y Scholes, y Markowitz (1952) sobre problemas de decisión de portafolios.

En todas las investigaciones mencionadas anteriormente, el concepto de proceso estocástico ha sido fundamental para su desarrollo. Los procesos estocásticos son útiles para el modelado del comportamiento aleatorio de variables económicas y financieras en el tiempo, como pueden ser: las tasas impositivas, los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de

---

[3] Cuando el nivel de volatilidad se mantiene constante, el resultado es similar al encontrado por Modigliani (1971) en el siguiente sentido: un agente adverso al riesgo (con utilidad logarítmica) para hacerle frente a la incertidumbre futura deberá seguir la estrategia de mantener su consumo proporcional a su riqueza. No obstante, es importante mencionar algunas diferencias significativas con respecto de Modigliani (1971). En esta investigación, la riqueza es una variable aleatoria y, en consecuencia, el consumo también es una variable aleatoria. Es decir, no se pueden determinar los niveles de riqueza y consumo en un instante dado, sólo se pueden determinar las probabilidades de que la riqueza y el consumo estén en ciertos rangos. En consecuencia, este trabajo trata con una constante de proporcionalidad entre cantidades aleatorias (consumo y riqueza). Dicha constante se determina a través de un parámetro subjetivo de preferencia entre consumo presente y futuro y el grado relativo de aversión al riesgo del agente, específicamente: la tasa subjetiva de descuento (intertemporal) y la importancia relativa que establece un agente, adverso al riesgo, entre consumir y mantener saldos reales por sus servicios de liquidez.

[4] El resultado 2) puede dejar de ser válido bajo el supuesto de volatilidad estocástica, es decir, el consumo no siempre es proporcional al nivel de la riqueza tal y como lo sugieren Lettau and Ludvigson (2004).

cambio, etc. El movimiento Browniano y el proceso de Poisson, así como sus aspectos teóricos y prácticos, han sido objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de la economía. Sin lugar a dudas, estos procesos se encuentran implícita o explícitamente en casi toda la economía financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos. Para ser más precisos, los movimientos pequeños que se presentan todos los días en los precios de los activos, son modelados con el movimiento Browniano, y los saltos bruscos e inesperados que ocasionalmente ocurren en dichos precios son modelados a través del proceso de Poisson. Asimismo, la incertidumbre en la política fiscal que sería instrumentada en el futuro, puede ser modelada a través de una combinación de dichos procesos. En este sentido, el caso mexicano es un buen ejemplo. Cada año, desde que se presenta la iniciativa de Ley de Ingresos del gobierno federal hasta que el Congreso la revisa y, usualmente, la modifica para aprobarla, los agentes económicos tienen que tomar, en el presente, decisiones de mediano y largo plazo, sobre consumo y portafolio, aún cuando exista incertidumbre en el rumbo de la política fiscal.

En esta investigación es relevante conducir el análisis de los casos de una economía cerrada y una abierta por separado, ya que en el primer caso, el índice nacional de precios al consumidor (INPC) sigue una ecuación diferencial estocástica exógena; mientras que en el segundo caso, el nivel general de precios de la economía satisface la condición de poder de paridad compra, de tal forma que el INPC está en función de dos cantidades exógenas; una, el nivel general de precios en el extranjero y dos, el tipo de cambio nominal, en cuyo caso se requiere de un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas que relacionen al INPC con ambas. De esta forma, la dinámica estocástica del INPC en una economía cerrada es exógena, mientras que en una economía abierta el proceso estocástico del INPC se determina endógenamente tomando al nivel general de precios del extranjero y al tipo de cambio nominal como cantidades exógenas. Es importante destacar que en el caso de una economía abierta, no sólo el análisis es más complejo, sino también los resultados son diferentes en cuanto a las proporciones de la riqueza que los individuos asignan a la tenencia de acciones.

Es importante resaltar algunos aspectos sobre los planteamientos de Taylor (1980) y Calvo (1983) sobre precios “sticky”, en el modelado del comportamiento del nivel general de precios, en la presente investigación. “Los precios de extracción del petróleo no cambian cada vez que el precio del petróleo cambia”. En Taylor (1980), las empresas cambian sus precios cada n-ésimo período (la decisión de cambiar precios está relacionada con los costos de menú). Mientras que en Calvo (1983), las empresas cambian sus precios en forma aleatoria (existe una cierta probabilidad asociada a la decisión de cambiar precios). Los modelos desarrollados en esta investigación tratan de conjuntar estas dos visiones en el precio del bien genérico de consumo (INPC), a través del proceso de saltos de Poisson. No obstante, en México, cada quincena se observan pequeñas fluctuaciones en el INPC en los reportes que publica el INEGI; estas pequeñas fluctuaciones pueden ser conducidas por el movimiento Browniano, eligiendo un parámetro de volatilidad muy (muy) pequeño. Por supuesto, los precios de los activos sí cambian con el entorno económico y el ambiente de negocios y, en consecuencia, la combinación del movimiento Browniano (con un parámetro de volatilidad de tamaño adecuado) con saltos de Poisson es natural, y no requiere argumentos adicionales que justifiquen su uso.

Este trabajo se ha organizado de la siguiente manera. En la primera sección, con base en los trabajos de Merton (1969 y 1971), Fischer (1975), Dothan (1978), Cox, Ingersoll y Ross (1985), Turnovsky (1993) y Grinols y Turnovsky (1994), se desarrolla un modelo general de toma de decisiones con precios conducidos por procesos Markovianos de difusión, específicamente por movimientos geométricos Brownianos. En la sección 2, con base en las investigaciones de Ahn y Thompson (1988) y Venegas Martínez (2001 y 2005), se presenta un modelo general sobre decisiones con precios conducidos por procesos de difusión con saltos de Poisson. En el transcurso de la sección 3, con base en los trabajos de Penati y Pennacchi (1989) y Venegas Martínez (2006a, 2006b y 2008), se propone un modelo general para el caso de precios guiados por procesos de difusión con saltos, cuando el nivel general de precios en el extranjero es estocástico. Por último, se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones. Cuatro apéndices contienen detalles sobre las condiciones de primer orden de problemas de decisión de consumidores-inversionistas racionales con diferentes restricciones presupuestales.

1. Modelos con difusiones

Considere una economía poblada por consumidores idénticos con vida infinita, los cuales maximizan su satisfacción por un bien de consumo y por la tenencia de saldos monetarios reales. De esta manera, la función de utilidad tiene dos argumentos: un bien de consumo de carácter perecedero y dinero en términos de los bienes que el consumidor puede comprar. En este contexto, los saldos reales producen satisfacción en los consumidores solamente por sus servicios de liquidez.

Sin duda, el supuesto de agente representativo es muy restrictivo, ya que elimina cualquier interacción (social y cultural) entre individuos. El modelo propuesto se puede generalizar, de tal manera que contemple la incorporación de individuos heterogéneos, si se utiliza una función de distribución sobre alguna característica, que permita distinguirlos entre sí (o por lo menos plantear un modelo con dos agentes con gustos y/o dotaciones distintas); en cuyo caso, los resultados serían diferentes a los encontrados aquí y la investigación tendría como destino otro tipo de situación con efectos diferentes; esto simplemente porque los supuestos serían distintos. Asimismo, es importante destacar que en lugar de llevar a cabo un análisis sobre una economía poblada con individuos idénticos, se puede considerar, en toda la investigación, de manera menos restrictiva un análisis sobre un individuo racional que toma decisiones bajo los supuestos y circunstancias establecidas.

1.1 Dinámica del nivel general de precios

Se supone que los individuos que viven en esta economía perciben que el precio del bien de consumo, P_t, es conducido por el siguiente proceso estocástico de difusión:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}W_{P,t}, \tag{1}$$

donde, el parámetro de tendencia, π, representa la tasa de inflación promedio esperada y el parámetro de volatilidad, σ_P, denota la variación esperada de la tasa de inflación. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_{P,t}\right]=0$ y $\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_{P,t}\right]=\mathrm{d}t$. La ecuación (1) generaliza el supuesto de previsión perfecta (expectativas racionales) en el nivel general de precios con distribución log-normal.

1.2 Activos del consumidor

El gobierno emite dinero y es también el único vendedor de bonos cupón cero (los individuos no emiten bonos). Se supone además que existe una empresa representativa con función de producción[5] $y = Ak_t$ que ofrece títulos de capital de acuerdo con el criterio[6] (determinista) de maximización de su beneficio neto $\Pi_t = Ak_t - rk_t$ donde r es la tasa de interés que pagan los bonos del gobierno (costo de oportunidad de invertir en capital). Una

[5] Otros trabajos en donde se utiliza este tipo de tecnologías son: Harrod (1939), Rebelo (1991) y Rivas-Aceves y Venegas-Martínez (2010); este último se desarrolla en un marco estocástico.

[6] El presente trabajo de investigación se concentra sólo en las decisiones de consumo y portafolio de un agente racional en ambientes de riesgo e incertidumbre. Un modelo estocástico de equilibrio general se puede ver en Venegas-Martínez (2009a).

condición necesaria de óptimo del problema anterior es $r = A$, es decir, en todo lo que sigue de manera indistinta se puede escribir r o A. De esta manera, el consumidor representativo tiene acceso a tres diferentes activos: dinero nominal, M_t; títulos nominales de deuda pública, B_t; y acciones en términos reales, k_t. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t, \tag{2}$$

donde, $m_t = M_t / P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t / P_t$ es la tenencia de bonos emitidos por el sector público en términos reales, con a_0 dada de manera exógena.

1.3 Problema de decisión del consumidor

El consumidor obtiene satisfacción por un bien genérico de consumo y por la tenencia de saldos reales por sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0$, V_0, de un individuo competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty \left[u\left(c_t\right) + v\left(m_t\right) \right] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \;\middle|\; F_0 \right\}, \tag{3}$$

donde $u(c_t)$ es el índice de satisfacción por el consumo; $v(m_t)$ es la utilidad por mantener saldos reales; δ es la tasa subjetiva de descuento, también llamada tasa subjetiva intertemporal; E_0 es la esperanza condicional al conjunto de información disponible en el tiempo $t = 0$, y F_0 es la información (sobre precios) relevante al tiempo $t = 0$. En particular, se seleccionan $u(c_t) = \theta \log\left(c_t\right)$ y $v(m_t) = \left(1-\theta\right)\log\left(m_t\right)$, $0 < \theta < 1$, lo cual conduce a un consumidor adverso al riesgo (ya que la función de utilidad es cóncava). Este supuesto permitirá generar soluciones analíticas que faciliten el estudio de las mismas.

1.4 Evolución de la restricción presupuestal

La restricción presupuestal del consumidor evoluciona de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[N_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\mathrm{d}R_{k,t}\right] - c_t\left(1+\tau_c\right)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau_t, \qquad (4)$$

donde,

$N_{j,t} \equiv \dfrac{j_t}{a_t} =$ proporción del portafolio en el activo j, $j = m, b, k$,

$\mathrm{d}R_{j,t} =$ tasa de rendimiento real después de impuestos sobre el activo j,

$j = m, b, k$,

$\mathrm{d}\tau_t =$ impuesto sobre la riqueza, y

$\tau_c =$ impuesto *ad valorem* sobre el consumo.

La ecuación (4) expresa que el cambio marginal en la riqueza real del individuo se puede incrementar o reducir por los rendimientos que pagan los diferentes activos, y siempre se reduce por el consumo y el pago de impuestos. En otras palabras, el individuo cuenta con una cantidad inicial (exógena) de riqueza real, a_0, la cual invierte en los diferentes activos; una vez que recibe el rendimiento, el agente decide cuánto consumir y su saldo (principal e intereses menos consumo) lo reinvierte, así sucesiva y continuamente.

1.5 Rendimiento de los activos

A continuación se determina el rendimiento de los activos disponibles en la economía. Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e i, respectivamente, es decir, $\mathrm{d}M_t = 0\,\mathrm{d}t$ y $\mathrm{d}B_t = i\left(1-\tau_y\right)\mathrm{d}t$, donde τ_y es un impuesto aplicado a la tasa de interés nominal de un bono gubernamental. El rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo, $t, \mathrm{d}R_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (1) como el proceso subyacente, conduce a (apéndice A):

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = \frac{\mathrm{d}\left(M_t / P_t\right)}{\left(M_t / P_t\right)} = r_m \,\mathrm{d}t - \sigma_P \,\mathrm{d}W_{P,t}, \tag{5}$$

donde, $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El rendimiento estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como:

$$\mathrm{d}R_{b,t} = r_b \,\mathrm{d}t - \sigma_P \,\mathrm{d}W_{P,t}, \tag{6}$$

donde, $r_b = i\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_P^2$ y τ_y es un impuesto a la tasa de interés nominal de un bono gubernamental libre de riesgo de incumplimiento. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad en el nivel general de precios. La tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos será denotada mediante:

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k \,\mathrm{d}t - \sigma_k \,\mathrm{d}W_{k,t}, \tag{7}$$

donde, el proceso $\mathrm{d}W_{k,t}$ tiene características similares al proceso definido en (1). Además del impuesto τ_y aplicado a la tasa de interés nominal de instrumentos de deuda pública y del impuesto *ad valorem* τ_c que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma:

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t \bar{\tau} \,\mathrm{d}t + a_t \sigma_\tau \,\mathrm{d}W_{\tau,t}, \tag{8}$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $\mathrm{d}W_{\tau,t}$ comparte las mismas características que el proceso de Wiener definido en (1).

1.6 Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (3) sujeto a (4). Observe que después de sustituir las expresiones (5)-(8) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, dada en la expresión (4), ésta se transforma en:

$$\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = \left[N_{m,t}\, r_m \;+\; N_{b,t}\, r_b \;+\; N_{k,t}\, r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \mathrm{d}t \qquad (9)$$
$$+ N_{k,t}\sigma_k \,\mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P \,\mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \,\mathrm{d}W_{\tau,t}.$$

Las soluciones del problema de maximización de utilidad total descontada, dada en (3), sujeto a (9) y a la restricción de normalización,

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1 \qquad (10)$$

están dadas por (apéndice B):

$$c_t = \frac{\delta\,\theta}{\left(1+\tau_c\right)} a_t; \qquad (11)$$

$$0 = \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{N_{m,t}} + r_m - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi; \qquad (12)$$

$$0 = r_b - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi; \qquad (13)$$

$$0 = r_k - N_{k,t}\,\sigma_k^2 + \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} - \delta\phi, \qquad (14)$$

donde, ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (10). La condición (11) expresa que el consumo es proporcional al nivel de la riqueza. Las condiciones (12)-(14) forman un sistema de ecuaciones en las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos. Así pues, después de restar (12) de (13), se encuentra que la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia de saldos reales,

$$\hat{N}_m = \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{i(1-\tau_y)}, \qquad (15)$$

es independiente del tiempo, es decir, dicha proporción permanece constante.

Asimismo, después de restar (13) de (14), se tiene que,

$$\hat{N}_k = \frac{A}{B}, \qquad (16)$$

donde,

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}, \qquad \text{y} \qquad B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0.$$

Como puede observarse, la proporción, N_k, de la riqueza destinada a la tenencia de títulos de capital también es independiente del tiempo. Asimismo, note que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas. Por último, el portafolio óptimo queda completamente determinado con $\hat{N}_b$, el cual se obtiene a partir de (10) como:

$$\hat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i\left(1-\tau_y\right)} - \hat{N}_k. \tag{17}$$

Evidentemente, es necesario suponer que el agente puede comprar cualquier fracción de activos y no existen comisiones por la compra de activos.

1.7 Volatilidad estocástica

En el modelo propuesto, la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia de saldos reales (y también las proporciones de los otros activos) se mantiene(n) constante(s) a fin de que el agente pueda sortear la aleatoriedad de los precios siempre y cuando la volatilidad sea constante, tal y como se obtiene en las ecuaciones (15), (16) y (17). Esto no explica del todo el hecho de que los consumidores, en la realidad, llevan a cabo una administración activa en el rebalanceo de los portafolios, cuando la volatilidad es cambiante. Asimismo, existe evidencia empírica de que la volatilidad del nivel general de precios varía en el transcurso del tiempo, tal y como predicen los modelos de ARCH y GARCH (por ejemplo: Engle, 1982 y Bollerslev, 1986). A fin de que las proporciones óptimas puedan cambiar con el tiempo, se requiere que la dinámica estocástica del nivel general de precios contemple que la volatilidad sea estocástica. Este aproximación está relacionada con el proceso GARCH(1,1)-M (Venegas-Martínez, 2010). Suponga para ello que el nivel general de precios satisface:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P(t) P_t \mathrm{d}W_{P,t}, \tag{18}$$

donde, a su vez, $\sigma_P(t)$ sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}\sigma_P^2(t) = a[b - \sigma_P^2(t)]\mathrm{d}t + \gamma\sigma_P(t)\mathrm{d}W_{P,t}. \tag{19}$$

En este caso, se dice que la volatilidad es estocástica con reversión a la media *b* y velocidad de ajuste *a*. El parámetro γ en la ecuación (19) es llamado la volatilidad de la volatilidad. Evidentemente, la incorporación de volatilidad estocástica conlleva a complicaciones técnicas mayores en el manejo del modelo y a resultados diferentes; esto simplemente porque los supuestos serían distintos. Se puede mostrar que al cambiar al marco de volatilidad estocástica, el consumo no siempre es proporcional al nivel de la riqueza, tal y como lo sugieren Lettau y Ludvigson (2004).

En la siguiente sección, se extienden los resultados encontrados y se modelan los saltos extremos e inesperados en los precios del bien genérico y de los activos que ocasionalmente ocurren, y los cambios repentinos en el rumbo de la política fiscal.

2. Difusiones con saltos

Como antes, se supone que la economía está poblada por consumidores idénticos con vida infinita, los cuales consumen un solo bien de carácter perecedero y mantienen saldos monetarios reales.

2.1 Dinámica del nivel general de precios

A continuación se utilizará el movimiento Browniano, para modelar las pequeñas fluctuaciones que se observan todos los días en el nivel general de precios, y el proceso de Poisson, para modelar los saltos que ocasionalmente ocurren. De esta manera, se supone que los individuos perciben que el precio del bien, P_t, es conducido por un proceso estocástico de difusión con saltos:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t\,\mathrm{d}t + \sigma_P\,P_t\mathrm{d}W_{P,t} + \nu_P\,P_t\mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{20}$$

donde π y σ_P se definen como en (1) y $1+\nu_P$ es el tamaño promedio esperado de posibles saltos en el nivel general de precios. También como en (1), el proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado. Se supone que los saltos en el nivel general de precios siguen un proceso de Poisson, $Q_{P,t}$, con parámetro de intensidad λ_P, de tal manera que,

$$\Pr\{\text{un salto unitario durante } \mathrm{d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 1\} = \lambda_P\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

mientras que,[7]

$$\Pr\{\text{ningún salto durante } \mathrm{d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 0\} = 1 - \lambda_P\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t). \tag{22}$$

En este caso,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}Q_{P,t}\right] = \mathrm{Var}\left[\mathrm{d}Q_{P,t}\right] = \lambda_P \mathrm{d}t. \tag{23}$$

De esta manera, la probabilidad de que se presente un salto de longitud 1 durante el instante $\mathrm{d}t$ es proporcional a dicho instante. El parámetro de intensidad, λ_P, mide el número promedio de saltos por unidad de tiempo (o λ_P^{-1} mide el tiempo promedio entre saltos). El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $Q_{P,0} = 0$. En todo lo que sigue, por simplicidad, se supondrá que $W_{P,t}$ y $Q_{P,t}$ no están correlacionados entre sí.

2.2 Activos de los consumidores

Como en el caso anterior, el consumidor representativo tiene acceso a tres distintos activos en la economía: dinero, M_t; títulos de deuda pública, B_t; y títulos de capital, K_t. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por (2).

Se supone que la función de utilidad esperada en el tiempo t, V_t, de un individuo competitivo y adverso al riesgo, tiene la siguiente forma separable:

$$V_t = \mathrm{E}_t\left\{\int_t^{\infty}\left[\theta\log(c_s) + (1-\theta)\log(m_s)\right]e^{-\delta s}\,\mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right\}, \tag{24}$$

donde, F_t es la información disponible en el tiempo t.

---

[7] Como siempre o(h) significa que o(h) / h tiende a 0 cuando h tiende a 0.

2.3 Restricción presupuestal

La evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = Z - \frac{c_t}{a_t}\left(1+\tau_c\right)\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}\tau_t}{a_t}, \tag{25}$$

donde, $Z = N_{m,t}\,\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\,\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\,\mathrm{d}R_{k,t}$, y $N_{j,t}$, $\mathrm{d}R_{j,t}$, $\mathrm{d}\tau_t$ y τ_c se definen como en (4).

2.4 Rendimiento de los activos

Enseguida se determina el rendimiento (cambio porcentual) de los activos. Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e *i*, respectivamente. El rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t, $\mathrm{d}R_{m,t}$, se obtiene mediante la aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (20) como el proceso subyacente, lo cual conduce a (apéndice C):

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = r_m\,\mathrm{d}t - \sigma_P\,\mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{26}$$

donde, $r_m = -\pi + \sigma_P^2$.

El rendimiento estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como:

$$\mathrm{d}R_{b,t} = r_b\,\mathrm{d}t - \sigma_P\,\mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{27}$$

donde, $r_b = i\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_P^2$ y, como antes τ_y es un impuesto al interés nominal de un bono libre de riesgo de incumplimiento. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad y posibles saltos en el nivel general de precios.

La tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos será denotada mediante:

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k\,\mathrm{d}t - \sigma_k\,\mathrm{d}W_{k,t} + \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t}\,, \tag{28}$$

donde, los procesos $\mathrm{d}W_{k,t}$ y $\mathrm{d}Q_{k,t}$, tienen características similares al proceso definido en (20).

Además del impuesto τ_y que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma:

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t\bar{\tau}\,\mathrm{d}t + a_t\sigma_\tau\,\mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t\nu_\tau\,\mathrm{d}Q_{\tau,t}\,, \tag{29}$$

donde, $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $\mathrm{d}W_{\tau,t}$ y $\mathrm{d}Q_{k,t}$ comparten las mismas características que el proceso de Wiener y de Poisson definidos en (20).

2.5 Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (24) sujeto a (25). Observe que después de sustituir las expresiones (26)-(28) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza (25), ésta se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} =& \left[N_{m,t}\,r_m + N_{b,t}\,r_b + N_{k,t}\,r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}\right]\mathrm{d}t \\ &+\left[N_{k,t}\sigma_k\,\mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P\,\mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau\,\mathrm{d}W_{\tau,t}\right] \\ &+\left[\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\left(\frac{1}{1+\nu_P}-1\right)\mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t}\nu_k\,\mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau\,\mathrm{d}Q_{\tau,t}\right] \ .\end{aligned} \tag{30}$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (30) y a la restricción de normalización,

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \tag{31}$$

están dadas por (apéndice D):

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)}a_t; \tag{32}$$

$$0 = \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{N_{m,t}} + r_m - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P} - \delta\phi; \tag{33}$$

$$0 = \left[r_b - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P} \right] - \delta\phi; \tag{34}$$

$$0 = \left[r_k - N_{k,t}\,\sigma_k^2 + \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} + \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P} \right] - \delta\phi, \tag{35}$$

donde, ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de normalización (31). Después de restar (33) de (34), se encuentra que la proporción óptima de la riqueza asignada a la tenencia de saldos reales, satisface:

$$\hat{N}_m = \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{i(1-\tau_y)}. \tag{36}$$

Este resultado coincide plenamente con (15) aun cuando el rendimiento de los saldos reales tenga una componente de salto; es decir, el individuo es indiferente a que se presenten o no saltos en el nivel general de precios, en su decisión sobre la tenencia de saldos monetarios. Asimismo, después de restar (34) de (35), se tiene que:

$$N_k B - A - \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+N_{k,t}\,\nu_P} - \frac{\lambda_k\,\nu_k}{1+N_{k,t}\,\nu_k} = 0, \tag{37}$$

donde,

$$B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0; \tag{38}$$

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}. \tag{39}$$

Claramente, la ecuación (37) es cúbica y, por lo tanto, tiene al menos una solución real (ya que las raíces complejas se presentan en pares conjugados), la cual denotaremos por $\hat{N}_k$. En particular, si suponemos que $\nu_P = \nu_k = 0$, se tiene como única solución:

$$\hat{N}_k \Big|_{\nu_P = \nu_k = 0} = \frac{A}{B}. \tag{40}$$

Si los parámetros ν_P y ν_k son de la misma magnitud y distintos de cero, entonces (37) se transforma en una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por:

$$\hat{N}_k \Big|_{\nu_P = \nu_k} = \frac{A\nu_P - B \pm \sqrt{\left(A\nu_P + B\right)^2 + 4B\nu_P^2\left(\lambda_P + \lambda_k\right)}}{2B\nu_P}. \tag{41}$$

Note que el discriminante es positivo y, en consecuencia, ambas raíces son reales. Observe también que, en ningún caso, se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas en todo momento. Finalmente, el portafolio óptimo queda completamente determinado con $\hat{N}_b$, el cual se obtiene a partir de (31) como:

$$\hat{N}_b = 1 - \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{i} - \hat{N}_k\ . \tag{42}$$

2.6 Inclusión de bonos extranjeros en el portafolio

El siguiente ejercicio extiende el modelo desarrollado a una economía abierta con la inclusión de bonos extranjeros reales. Suponga que el consumidor tiene acceso a cuatro activos diferentes: dinero (nominal) doméstico, M_t; bonos gubernamentales (nominales) domésticos, B_t; acciones domésticas, k_t; y bonos reales extranjeros (en términos de bienes), b_t^*. De esta manera, la riqueza real del consumidor, a_t, en términos del consumo como bien numerario, está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t + b_t^*, \tag{43}$$

donde, $m_t = M_t / P_t$ son los balances monetarios reales y $b_t = B_t / P_t$ representa bonos domésticos en términos reales, y b_t^* define la tendencia de bonos extranjeros reales. La ecuación de evolución de la riqueza real:

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left[N_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\mathrm{d}R_{k,t} + N_{b^*,t}\mathrm{d}R_{b^*,t} \right] - c_t \left(1+\tau_c\right)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau_t, \quad (44)$$

donde,

$N_{j,t} \equiv \dfrac{j_t}{a_t} =$ participación del activo j, $j = m, b, k, b^*$; en el portafolio;

$\mathrm{d}R_{j,t} =$ rendimiento del activo j, $j = m, b, k, b^*$, después de impuestos.

En este caso, una aplicación del lema Itô de conduce a:

$$\mathrm{d}R_{m,t} = \frac{\mathrm{d}\left(M_t / P_t\right)}{\left(M_t / P_t\right)} = r_m\, \mathrm{d}t - \sigma_P\, \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_p} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}, \quad (45)$$

donde, $r_m = -\pi + \sigma_P^2$.

Similarmente,

$$\mathrm{d}R_{b,t} = \frac{\mathrm{d}\left(B_t / P_t\right)}{\left(B_t / P_t\right)} = r_b\, \mathrm{d}t - \sigma_P\, \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_p} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}, \quad (46)$$

donde, $r_b = i\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_P^2$, y τ_y es la tasa de impuestos sobre intereses.

Denote la tasa de rendimiento de las acciones mediante:

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k\, \mathrm{d}t + \sigma_k\, \mathrm{d}W_{k,t} + \nu_k\, \mathrm{d}Q_{k,t}, \quad (47)$$

donde, $W_{k,t}$ es un movimiento Browniano y $Q_{k,t}$ es un proceso de Poisson con parámetro de intensidad λ_k. Por último, suponga que el consumidor toma como dada la tasa de rendimiento de los bonos extranjeros, la cual se supone determinista con:

$$\mathrm{d}b_t^* = b_t^* \mathrm{d}R_{b^*,t} = b_t^* r_{b^*} \mathrm{d}t. \tag{48}$$

Por otra parte, suponga que el agente paga impuestos sobre la riqueza real de acuerdo con:

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t \overline{\tau}\, \mathrm{d}t + a_t \sigma_\tau\, \mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t \nu_\tau\, \mathrm{d}Q_{\tau,t}\,,$$

donde, $\overline{\tau}$ es el impuesto medio esperado sobre la riqueza. Como antes $W_{\tau,t}$ y $Q_{\tau,t}$ es un proceso de Poisson. Todos los procesos $Q_{P,t}$, $Q_{k,t}$ y $Q_{\tau,t}$ son mutuamente no correlacionados.

Suponga, a continuación, que el consumidor maximiza:

$$V_0 = \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty \left[u(c_t) + v(m_t) \right] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \,\Big|\, F_0 \right\},$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = {} & \left[N_{m,t}\, r_m + N_{b,t}\, r_b + N_{k,t}\, r_k + N_{b^*,t}\, r_{b^*} - \frac{c_t (1+\tau_c)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t \\ & + \left(N_{m,t} + N_{b,t} \right) \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1 \right) \mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t}\, \nu_k\, \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau\, \mathrm{d}Q_{\tau,t}\,, \end{aligned}$$

donde,

$$\mathrm{d}W_t = N_{k,t}\sigma_k\, \mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t} + N_{b,t} \right) \sigma_P\, \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}\,.$$

Evidentemente, ahora la condición de normalización es:

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} - N_{b*,t} = 0.$$

Las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad están dadas por:

$$c_t = \frac{\delta\, \theta}{(1+\tau_c)} a_t; \tag{49}$$

$$\frac{\delta\left(1-\theta\right)}{N_{m,t}}+r_m+\sigma_{WP}-\frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P}-\delta\,\phi=0; \tag{50}$$

$$r_b+\sigma_{WP}-\frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P}-\delta\phi=0; \tag{51}$$

$$r_k-\sigma_{Wk}+\frac{\lambda_k\,\nu_k}{1+N_{k,t}}-\delta\phi=0; \tag{52}$$

$$r_{b*}=\delta\phi; \tag{53}$$

donde, ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de normalización,

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_t,\,\sigma_P W_{P,t}\right)=\sigma_{WP}\,\mathrm{dt} \tag{54}$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_t,\,\sigma_k W_{k,t}\right)=\sigma_{Wk}\,\mathrm{d}t. \tag{55}$$

Al restar la tercera condición de la segunda, se determinan los valores óptimos de $N_{j,t}$ para $j=m,b,k,b^*$. Observe que al restar la segunda condición de la tercera, se obtiene $N_{m,t}$. Al sustituir la última condición en la cuarta y tercera condiciones, se obtienen, respectivamente $N_{K,t}$ y $N_{b^*,t}$. Por último, la decisión óptima $N_{b^*,t}$ se obtiene de la condición de normalización.

3. Difusión con saltos y nivel general de precios en el extranjero estocástico

En esta sección, se extiende el problema de decisión del consumidor racional bajo condiciones de riesgo, en un marco de economía abierta, para incluir bonos nominales emitidos en el extranjero (emitidos en dólares o euros)[8].

---

[8] El modelo de Mundell y Fleming (1960-1963) predice, con base en el aparato determinista IS-LM, que la teoría fiscal no es eficaz en una economía abierta con un tipo

Esto requiere de algunas modificaciones con respecto al modelo desarrollado en la sección anterior. Se supone además que el precio del bien que produce la economía y el tipo de cambio siguen ambos procesos de difusión con saltos. De esta manera, la dinámica estocástica del nivel general de precios de la economía se obtiene de manera endógena.

3.1 Dinámica de precios

Como antes, se supone que el nivel general de precios de la economía, *Pt*, satisface la condición de poder de paridad compra $P_t = P_t^* E_t$, donde P_t^* es el nivel de precios en el extranjero, y E_t es el tipo de cambio nominal. Se supone además que P_t^* *y* E_t son conducidos, respectivamente, por los siguientes procesos:

$$\frac{\mathrm{d}P_t^*}{P_t^*} = \pi^* \mathrm{d}t + \sigma_{P^*} \mathrm{d}W_{P^*,t} + \nu_{P^*} \mathrm{d}Q_{P^*,t}, \tag{56}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}E_t}{E_t} = e\mathrm{d}t + \sigma_E \mathrm{d}W_{E,t} + \nu_E \mathrm{d}Q_{E,t}, \tag{57}$$

donde, los componentes de difusión y saltos son definidos de manera usual.

3.2 Activos disponibles en los mercados financieros

A continuación se introducen los bonos extranjeros, digamos del resto del mundo, denominados en moneda extranjera e internacionalmente comerciables, B_t^*. Estos bonos serán denotados en términos reales mediante $b_t^* = E_t B_t^* / P_t$, entonces la riqueza real del individuo está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t + b_t^*. \tag{58}$$

---

de cambio flotante y un grado elevado de movilidad de capitales. Sin embargo, es necesario aclarar que el modelo aquí propuesto para el caso de economía abierta no tiene como propósito discutir los efectos de una política fiscal expansionista sobre la balanza comercial, el empleo y el producto, solamente pretende estudiar, bajo un conjunto de supuestos, las decisiones de consumo y portafolio, de agentes expuestos a situaciones de riesgo e incertidumbre. Una investigación sobre los efectos de la política fiscal en ambientes estocásticos se puede encontrar en Venegas-Martínez (2006b).

En este caso, la ecuación diferencial estocástica del índice de precios doméstico satisface:

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}(P_t^* E_t)}{(P_t^* E_t)} = (\pi^* + e + \sigma_{P^*E})\,\mathrm{d}t + \sigma_{P^*}\mathrm{d}W_{P^*,t} + \sigma_E \mathrm{d}W_{E,t} + \nu_{P^*}\mathrm{d}Q_{P^*,t} + \nu_E \mathrm{d}Q_{E,t}, \tag{59}$$

Las tasas reales de rendimiento para el consumidor doméstico por la tenencia de dinero, bonos domésticos, acciones y bonos extranjeros están dadas, respectivamente, por:

$$\mathrm{d}R_{m,t} = \frac{\mathrm{d}\,(M_t / P_t)}{M_t / P_t} = r_m \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1\right)\mathrm{d}Q_{E,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P^*,t}; \tag{60}$$

$$\mathrm{d}R_{b,t} = \frac{\mathrm{d}\,(B_t / P_t)}{B_t / P_t} = r_b \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1\right)\mathrm{d}Q_{E,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P^*,t}; \tag{61}$$

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k \mathrm{d}t + \sigma_k \mathrm{d}Wk,t + \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t}; \tag{62}$$

$$\mathrm{d}R_{b^*,t} = \frac{\mathrm{d}\,(B_t^* / P_t^*)}{B_t^* / P_t^*} = r_{b^*}\mathrm{d}t - \sigma_{P^*}\mathrm{d}W_{P^*,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P^*,t}. \tag{63}$$

Las componentes deterministas de los procesos anteriores satisfacen: $r_m = -\pi + \sigma_P^2$, $r_b = i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2$ y $r_b = i^*(1-\tau_y^*) - \pi^* + \sigma_{P^*}^2$. En este caso, τ_y es un impuesto que se aplica a la tasa nominal de interés.

3.3 Restricción presupuestal

La ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza toma ahora la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = {} & \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k + N_{b^*,t} r_{b^*} - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t \\
& + \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1\right) \mathrm{d}Q_{E,t} \\
& + \left(N_{m,t} + N_{b,t} + N_{b^*,t}\right)\left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1\right) \mathrm{d}Q_{P,t} \\
& + N_{k,t}\nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t}
\end{aligned}
\tag{64}
$$

donde, las componentes de difusión satisfacen:

$$
\mathrm{d}W_t = N_{k,t}\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - N_{b^*,t}\sigma_{P^*}\mathrm{d}W_{P^*,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}. \tag{65}
$$

3.4 Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad sujeto a la ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza y a la condición de normalización están dadas por:

$$
c_t = \frac{\delta\theta}{\left(1+\tau_c\right)} a_t; \tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(1-\theta\right)}{N_{m,t}} + r_m = {} & -\sigma_{WP} + \frac{\lambda_E \nu_E}{1+\left(1-N_{m,t}+N_{b,t}\right)\nu_E} \\
& + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{b^*,t}\right)\nu_{P^*}} + \delta\phi;
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
r_b = r_m + \frac{\delta\left(1-\theta\right)}{N_{m,t}}; \tag{68}
$$

$$
r_k = \sigma_{Wk} - \frac{\lambda_k \nu_k}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}+N_{b^*,t}\right)\nu_k} + \delta\phi; \tag{69}
$$

$$
r_{b^*} = -\sigma_{WP^*} + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{b^*,t}\right)\nu_{P^*}} + \delta\phi. \tag{70}
$$

Observe que, como antes, la relación (66) indica que el consumo es proporcional al nivel de la riqueza. Las ecuaciones restantes determinan las proporciones óptimas de la riqueza que el consumidor racional asignará a los diferentes activos.

3.5 Decisiones óptimas

A partir de la ecuación (68), se encuentra, como en el caso en que no hay bonos extranjeros, que la proporción, en el portafolio óptimo, que se asigna a la tenencia de saldos monetarios reales está dada por:

$$\widehat{N}_m = \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)}.$$

Al restar (69) de (68), y (70) de (69), se obtiene el siguiente sistema no homogéneo de ecuaciones en las variables $N_{k,t}$ y $N_{b^*,t}$:

$$BN_{k,t} + GN_{b^*,t} = A + \frac{\lambda_k \nu_k}{1+N_{k,t}\nu_k} + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+N_{k,t}\nu_{P^*}} + \frac{\lambda_E \nu_E}{1+\left(N_{k,t}+N_{b^*,t}\right)\nu_E} \tag{71}$$

$$B'N_{k,t} + G'N_{b^*,t} = A' + \frac{\lambda_k \nu_k}{1+N_{k,t}\nu_k} + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+N_{k,t}\nu_{P^*}} \tag{72}$$

donde, A y B son constantes que dependen de varianzas y covarianzas, y

$$G = \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{k,\tau} - \sigma_{P^*P},$$

$$A' = r_k - r_{b^*} + \sigma_{Pk} + \sigma_{k,\tau} + \sigma_{P^*P} + \sigma_{P^*,\tau},$$

$$B' = \sigma_k^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P^*,k} - \sigma_{P^*P},$$

$$G' = \sigma_{Pk} + \sigma_{P^*P} - \sigma_{P^*,k} - \sigma_P^2.$$

Si se denota el total de acciones y bonos extranjeros mediante $z_t = N_{k,t} + N_{b^*,t}$ y $x_t = N_{k,t}/z_t = N_{k,t}/\left(N_{k,t}+N_{b^*,t}\right)$ es la proporción de acciones en Z_t, entonces el sistema (71)-(72) puede ser reescrito como:

$$\left(B-B'\right)x_t z_t + \left(G-G'\right)\left(1-x_t\right)z_t = A - A' + \frac{\lambda_E \nu_E}{1+z_k \nu_E}, \tag{73}$$

$$B'x_t z_t + G'\left(1 - x_t\right) z_t = A' + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + x_t z_t \nu_k} + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*}}{1 + x_t z_t \nu_{P^*}}. \tag{74}$$

Observe que en virtud de (73), se tiene que x_t se puede expresar como función de z_t:

$$x_t = \Theta + \Psi \frac{1}{z_t} + \Phi \frac{1}{z_t\left(1 + z_t \nu_E\right)} = \frac{\Theta z_t\left(1 + z_t \nu_E\right) + \Psi\left(1 + z_t \nu_E\right) + \Phi}{z_t\left(1 + z_t \nu_E\right)}, \tag{75}$$

donde,

$$\Theta = -\frac{G - G'}{B - B' - \left(G - G'\right)},$$

$$\Psi = -\frac{A - A'}{G - G'}\Theta, \qquad \text{y,}$$

$$\Phi = \frac{\lambda_E \nu_E}{G - G'}.$$

Si se sustituye (75) en la ecuación (74), se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(B' - G'\right)\left[\left(1 + z_t \nu_E\right)\left(\Psi + \Theta z_t\right) + \Theta\right] z_t = {} & \left(A' - G' z_t\right) z_t \left(1 + z_t \nu_E\right) \\ & + \frac{\lambda_k \nu_k z_t \left(1 + z_t \nu_E\right)^2}{\left(1 + z_t \nu_E\right)\left(1 + \Psi + \Theta z_t\right) + \Phi\, \nu_k} \\ & + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*} z_t \left(1 + z_t \nu_E\right)^2}{\left(1 + z_t \nu_E\right)\left(1 + \Psi + \Theta z_t\right) + \Phi\, \nu_{P^*}}\end{aligned} \tag{76}$$

La ecuación anterior tiene una raíz real denotada mediante $\hat{z}$. Por lo tanto,

$$\hat{x} = \Theta + \Psi \frac{1}{\hat{z}} + \Phi \frac{1}{\hat{z}\left(1 + \hat{z} \nu_E\right)}. \tag{77}$$

A partir de las definiciones de $\hat{z}$ y $\hat{x}$, se sigue que $\widehat{N}_k = \hat{x}\hat{z}$ y $\widehat{N}_{b^*} = \left(1 - \hat{x}\right)\hat{z}$, respectivamente. El portafolio óptimo es completamente determinado por:

$$\widehat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)} - \widehat{N}_k - \widehat{N}_{b^*}. \tag{78}$$

Conclusiones

En esta investigación, dentro de un marco teórico consistente, se conjuntaron varios modelos con diferentes grados de complejidad y realismo que describen el comportamiento de un consumidor-inversionista, el cual toma decisiones de consumo y portafolio bajo diversas situaciones de riesgo de mercado e incertidumbre en la política fiscal. Vale la pena destacar que en el marco teórico desarrollado, el movimiento Browniano y el proceso de Poisson fueron fundamentales en el modelado de riesgo de mercado y la incertidumbre en la política fiscal. Los movimientos pequeños en los diferentes precios de los activos fueron modelados con difusiones y los saltos bruscos e inesperados, con procesos de saltos.

Varios modelos disponibles en la literatura especializada fueron circunscritos y extendidos en marco teórico que los conjuntó y extendió en forma sistemática, en cuanto a complejidad y realismo. Además, este estudio sistemático, y en particular la sección 3, arrojó varias conclusiones relevantes sobre la toma de decisiones en ambientes de riesgo que se presentan independientemente de si la economía está abierta o no: 1) El consumo de los agentes siempre será proporcional al nivel de la riqueza. 2) Las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos son cantidades estacionarias, es decir, son cantidades constantes y, por tanto, independientes del tiempo. 3) La imposición futura de un impuesto incierto sobre la riqueza no afecta las decisiones presentes sobre la tenencia de saldos monetarios reales.

Es evidente que los resultados obtenidos son consistentes con lo observado en ambientes de estabilidad macroeconómica, en donde el nivel de volatilidad se mantiene constante. El marco teórico propuesto, como cualquier otro, tiene limitaciones. Una de las características más importantes de los mercados de activos financieros es que, eventualmente, se presentan saltos repentinos e inesperados de magnitud extrema en los precios de los activos: auges o caídas. De hecho, todos los consumidores-inversionistas anhelan un auge de magnitud extrema. Así pues, es importante reconocer, de manera explícita, la ocurrencia de saltos de magnitud extrema en los precios de los activos. Por lo anterior, es imperativo extender el modelado del riesgo de mercado a procesos mixtos de difusión con saltos, en donde el tamaño del salto es una variable aleatoria de valores extremos, ya sea del tipo Weibull o Fréchet, a fin de alcanzar mayor realismo en el tratamiento de auges y caídas en los mercados financieros y en el rebalanceo activo de los portafolios de inversión; tal y como se ha observado en la crisis mundial actual y, por supuesto, en la crisis económica y financiera mexicana, que se agudizó a finales de 2008.

Otra limitación que tiene el modelo es el supuesto de individuos idénticos en gustos y dotaciones. En consecuencia, la extensión al caso de agentes heterogéneos queda pendiente para una investigación futura. Otra tarea en la agenda de investigación consiste en extender el modelo al caso de volatilidad estocástica, ya que en el presente estudio, el modelo se acoge al supuesto de volatilidad constante.

Referencias

Ahn, C. M.; and H. E. Thompson (1988). "Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of the Interest Rates". *Journal of Finance.* Vol. 43, No. 1, pp. 155-174.

Black, F.; and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*. Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.

Calvo, G. A. (1983). "Staggered prices in a utility-maximizing framework". *Journal of Monetary Economics.* Vol. 12, No. 3, pp. 983-998.

Capinski, M.; and T. Zastawniak (2005). "Mathematics for Finance". Springer-Verlag, Berlin.

Cox, J.; J Ingersoll; and S. Ross (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices". *Econometrica.* Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Dothan, L. U. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*. Vol. 6, No. 1, pp. 59-69.

Engle, R. F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica.* Vol. 50. No. 4, pp. 987-1007.

Fischer, S. (1975). "The Demand for Index Bonds". *The Journal of Political Economy*. Vol. 83, No. 3, pp. 509-534.

Gihman, I. I.; and A. V. Skorohod (1972). Stochastic differential equations, Springer-Verlag. Berlin.

Grinols, E. L.; and S. J. Turnovsky (1994). "Exchange Rate Determination and Asset Prices in a Stochastic Small Open Economy". *Journal of International Economics*. Vol. 36, No. 1-2, pp 75-97.

Harrod, R. (1939). "An Essay in Dynamic Theory". *The Economic Journal*. Vol. 49. No. 193, pp. 14-33.

Hull, J. (2000). Options, Futures and other Derivates. Prentice Hall.

Ibarra-Valdez, C. (2007). Dos demostraciones de la fórmula de Black-Scholes. Departamento de Matemáticas. UAM-Iztapalapa, México.

Kim, M. (2003). Financial Mathematics. Queen's University. Belfast, United Kingdom. http://web.am.qub.ac.uk/users/m.s.kim/lectures.htm

Lettau, M.; and S. C. Ludvigson (2004). "Understanding Trend and Cycle in Asset Values: Reevaluating the Wealth Effect on Consumption". *American Economic Review*. Vol. 94, No. 1, pp. 276-299.

Markowitz, H. M. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance.* Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The continuous-Time Case". *Review of Economics and Statistics.* Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.

Merton, R. C. (1971), Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 373-413.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*. Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Modigliani, F. (1971). "Monetary Policy and Consumption". *in Consumer Spending and Monetary Policy: the linkages*, Federal Reserve Bank of Boston, *Conference Series*, No. 5, pp. 9-84.

Nielsen, L. T. (1999). "Pricing and Hedging of Derivate Securities". Oxford University Press.

Penati, A. and G. Pennacchi (1989). "Optimal Portfolio Choice and the Collapse of a Fixed-Exchange Rate Regime". *Journal of International Economics*. Vol. 27, No. 1-2, pp. 1-24.

Rebelo, S. (1991). "Long Run Policy Analysis and Long Run Growth". *The Journal of Political Economy*. Vol. 99, No. 3, pp. 500 - 521.

Rivas Aceves, A. y F. Venegas Martínez (2010). "Gobierno como promotor del cambio tecnológico: un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda". *Economía Mexicana, Nueva Época*. Vol. 19, No. 1, por aparecer.

Taylor J. B. (1980). "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts". *Journal of Political Economy.* Vol. 88, No. 1, pp. 1-23.

Shah, A. (1997). Black, Merton and Scholes: Their work and its Consequences. Indira Gandhi Institute of Development Research. Bombay, India. www.mayin.org/ajayshah/PDFDOCS/Shah1997_bms.pdf

Turnovsky, S. J. (1993). "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy". *International Economic Review.* Vol. 34, No. 4, pp. 953-9882.

Venegas Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Contro.*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.

Venegas Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance.* Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

Venegas Martínez, F. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*. Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

Venegas Martínez, F. (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk". *Journal of World Economic Review*. Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.

Venegas Martínez, F. (2006c). "Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, 1a. edición". International Thomson Editors.

Venegas Martínez, F. (2008). "Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, 2a. edición". Cengage Learning (anteriormente International Thomson Editors).

Venegas Martínez, F. (2009). "Temporary Stabilization in Developing Countries and Real Options on Consumption". *International Journal of Economic Research*. Vol. 6, No. 2, 229-249.

Venegas Martínez, F. (2009a). "Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal". *Investigación Económica.* Vol. 68, No. 268, pp. 69-114.

Venegas Martínez, F. (2010). "Precios, riesgo cambiario y opciones reales para posponer consumo: un análisis con volatilidad estocástica". *El trimestre Económico*. por aparecer.

Apéndice A

En este apéndice se establecen, sin demostración, un par de resultados sobre la diferencial estocástica del cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos. Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas, homogéneas y lineales,

$$\mathrm{d}X_t = X_t\left(\mu_X \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X\right) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}Y_t = Y_t\left(\mu_Y \mathrm{d}t + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right)$$

Donde $\mathrm{d}W_x$, $\mathrm{d}W_y$, son procesos de Wiener con $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_X, \mathrm{d}W_Y) = \rho_{XY}\ \mathrm{d}t$, entonces las diferenciales estocásticas del cociente X_t/Y_t y del producto X_tY_t satisfacen, respectivamente, a:

$$\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{X_t}{Y_t}\left[\left(\mu_X - \mu_Y + \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X - \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right] \tag{A.1}$$

y

$$\mathrm{d}\left(X_tY_t\right) = X_tY_t\left[\left(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right] \tag{A.2}$$

Apéndice B

En este apéndice, se determinan las condiciones de primer orden para una solución interior del siguiente problema de control óptimo estocástico:

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} E_0\left\{\int_0^\infty \left[\theta \log\left(c_t\right) + \left(1-\theta\right)\log\left(N_{m,t}a_t\right)\right] e^{-\delta t}\mathrm{d}t\right\}, \tag{B.1}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} &= N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau} \\ &\quad + N_{k,t}\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t};\end{aligned} \tag{B.2}$$

y

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} = 0, \tag{B.3}$$

donde i, π, τ_c, τ_y, $\overline{\tau}$, y las correspondientes varianzas y covarianzas son tomadas como dadas. En este caso, la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B), para la programación dinámica en tiempo continuo, está dada por:

$$\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H\left(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t\right) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{\theta \log\left(c_t\right) + \left(1-\theta\right)\log\left(N_{m,t} a_t\right) - \delta V\left(a_t\right) \\
&+ a_t V'\left(a_t\right)\left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau}\right] \\
&+ \tfrac{1}{2} a_t^2 V''\left(a_t\right)\Big[\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right) N_{k,t} \sigma_{P,k} + 2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_{P\tau} - 2 N_{k,t} \sigma_{k,\tau}\Big] \\
&+ \phi\left(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}\right)\Big\} = 0
\end{aligned} \tag{B.4}$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado con la condición de normalización, $V\left(a_t\right)e^{-\delta t}$ es la función de utilidad indirecta del consumidor y $V'\left(a_t\right)e^{-\delta t}$ es la variable de co-estado. La condición H-J-B evaluada en el máximo, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en $V\left(a_t\right)$. Con el propósito de resolver dicha ecuación diferencial, se postula la función $V\left(a_t\right)$ bajo la forma: $V\left(a_t\right) = \beta_0 + \beta_1 \log\left(a_t\right)$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H\left(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t\right) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{\theta \log\left(c_t\right) + \left(1-\theta\right)\log\left(N_{m,t} a_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1 \log\left(a_t\right)\right] \\
&+ \beta_1\left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau}\right] \\
&+ \tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right) N_{k,t} \sigma_{P,k} + 2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_{P\tau} - 2 N_{k,t} \sigma_{k,\tau}\Big] \\
&+ \phi\left(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}\right)\Big\} = 0
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias para un máximo son:

$$0=\frac{\partial H}{\partial c_t}=\frac{\theta}{c_t}-\frac{\beta_1\left(1+\tau_c\right)}{a_t}; \tag{B.6}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{m,t}}=\frac{1-\theta}{N_{m,t}}+\beta_1\left[r_m-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}\right]-\phi; \tag{B.7}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{b,t}}=\beta_1\left[r_b-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}\right]-\phi; \tag{B.8}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{k,t}}=\beta_1\left[r_k-N_{k,t}\sigma_k^2+\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pk}+\sigma_{k\tau}\right]-\phi; \tag{B.9}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial \phi}=1-\left(N_{m,t}+N_{b,t}+N_{k,t}\right). \tag{B.10}$$

Falta sólo determinar los coeficientes β_0 y β_1 definidos en $V\left(a_t\right)$, a saber, $\hat{c}_t$, $\widehat{N}_m$, $\widehat{N}_b$ y $\widehat{N}_k$ dados en la condición de H-J-B, se obtiene que:

$$\begin{aligned}0=&\left(1-\delta\beta_1\right)\log\left(a_t\right)+\theta\log\left(\theta\right)+\left(1-\theta\right)\log\left(1-\theta\right)\\&-\theta\log\left[\beta_1\left(1+\tau_c\right)\right]-\left(1-\theta\right)\log\left[\beta_1 i\left(1+\tau_y\right)\right]-\delta\beta_0\\&+\beta_1\left[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_m\right)\left(-\pi+\sigma_P^2\right)\right.\\&+\widehat{N}_b\left[i\left(1+\tau_y\right)-\pi+\sigma_P^2\right]+\widehat{N}_k r_k-\frac{\hat{c}_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t}-\overline{\tau}\left.\right]\\&-\tfrac{1}{2}\beta_1\left[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)^2\sigma_P^2+N_k^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2-2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}\right.\\&+2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\sigma_{P\tau}-2\widehat{N}_k\sigma_{k,\tau}\left.\right]\end{aligned} \tag{B.11}$$

lo cual implica $\beta_1=1/\delta$ y

$$\beta_0 = \frac{\theta}{\delta}\log(\theta) + \frac{(1-\theta)}{\delta}\log(1-\theta) - \frac{\theta}{\delta}\log\left(\frac{1+\tau_c}{\delta}\right) - \frac{(1-\theta)}{\delta}\log\left[\frac{i(1+\tau_y)}{\delta}\right]$$
$$-\frac{\theta}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\left[\left(\widehat{N}_m + \widehat{N}_m\right)\left(-\pi + \sigma_P^2\right) + \widehat{N}_b\left[i(1+\tau_y) - \pi + \sigma_P^2\right] + \widehat{N}_k r_k - \overline{\tau}\right] \qquad \text{(B.12)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\delta^2}\left[\left(\widehat{N}_m + \widehat{N}_b\right)^2 \sigma_P^2 + N_k^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2\left(\widehat{N}_m + \widehat{N}_b\right)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}.\right.$$
$$\left.+2\left(\widehat{N}_m + \widehat{N}_b\right)\sigma_{P\tau} - 2\widehat{N}_k\sigma_{k,\tau}\right].$$

Apéndice C

En este apéndice se establece sin demostración,[9] un par de resultados sobre la diferencial estocástica del cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos.

Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas, homogéneas y lineales,

$$\mathrm{d}X_t = X_t\left(\mu_X \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X + \nu_X \mathrm{d}Q_X\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}Y_t = Y_t\left(\mu_Y \mathrm{d}t + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y + \nu_Y \mathrm{d}Q_Y\right)$$

donde, $\mathrm{d}Q_X$ y $\mathrm{d}Q_Y$ son procesos de Poisson no correlacionados; $\mathrm{d}W_X$, $\mathrm{d}W_Y$ son procesos de Wiener con $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_X, \mathrm{d}W_Y) = \rho_{XY}\,\mathrm{d}t$; y los procesos de Wiener son no correlacionados con los procesos de Poisson, entonces, las diferenciales estocásticas del cociente X_t/Y_t y del producto X_tY_t satisfacen, respectivamente,

$$\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{X_t}{Y_t}\begin{bmatrix}\left(\mu_X - \mu_Y + \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X - \sigma_Y \mathrm{d}W_Y \\ +\nu_X \mathrm{d}Q_X + \left(\dfrac{1}{1+\nu_Y} - 1\right)\mathrm{d}Q_Y\end{bmatrix} \qquad \text{(C.1)}$$

y

$$\mathrm{d}\left(X_tY_t\right) = X_tY_t\left[\left(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y + \nu_X \mathrm{d}Q_X + \nu_Y \mathrm{d}Q_Y\right]. \qquad \text{(C.2)}$$

---

[9] Gihman and Skorohod (1972).

Apéndice D

A continuación, se determinan las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad total del consumidor:

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} E_0 \left\{ \int_0^{\infty} \left[\theta \log(c_t) + (1-\theta) \log(N_{m,t} a_t) \right] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\}, \tag{D.1}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = & \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t (1+\tau_c)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \\ & + \left[N_{k,t} \sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} \right] \\ & + \left[(N_{m,t} + N_{b,t}) \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1 \right) \mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t} \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} \right] \end{aligned} \tag{D.2}$$

y

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} = 0, \tag{D.3}$$

donde i, π, τ_c, τ_y, $\overline{\tau}$, y las correspondientes varianzas y covarianzas son tomadas como dadas. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) para el problema de control óptimo estocástico, planteado en (D.1)-(D.3), está dada por:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\ & \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{ \theta \log(c_t) + (1-\theta) \log(N_{m,t} a_t) - \delta V(a_t) \\ & + a_t V'(a_t) \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \\ & + \tfrac{1}{2} a_t^2 V''(a_t) \Big[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\ & - 2 (N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{P,k} + 2 (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2 N_{k,t} \sigma_{k,\tau} \Big] \\ & + \lambda_P \left[V\left(a_t \left(1 - (N_{m,t} + N_{b,t}) \frac{\nu_P}{1+\nu_P} \right) \right) - V(a_t) \right] \\ & + \lambda_k \left[V\left(a_t (1 + N_{k,t} \nu_k) \right) - V(a_t) \right] \\ & + \lambda_\tau \left[V\left(a_t (1 - \nu_\tau) \right) - V(a_t) \right] + \phi (1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{D.4}$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange, asociado a la restricción de normalización (D.3); $V\left(a_t\right)e^{-\delta t}$ es la función de utilidad indirecta del agente, y $V'\left(a_t\right)e^{-\delta t}$ es la variable de co-estado. La ecuación de H-J-B evaluada en el máximo se transforma en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, en $V\left(a_t\right)$ y se postula como candidato de solución a la función $V\left(a_t\right)=\beta_0+\beta_1\log\left(a_t\right)$. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t,N_{m,t},N_{b,t},N_{k,t}} H\left(c_t,N_{m,t},N_{b,t},N_{k,t};a_t\right)\equiv\\
&\max_{c_t,N_{m,t},N_{b,t},N_{k,t}} \Big\{\theta\log\left(c_t\right)+\left(1-\theta\right)\log\left(N_{m,t}a_t\right)-\delta\left[\beta_0+\beta_1\log\left(a_t\right)\right]\\
&+\beta_1\left[N_{m,t}r_m+N_{b,t}r_b+N_{k,t}r_k-\frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t}-\overline{\tau}\right]\\
&-\tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)^2\sigma_P^2+N_{k,t}^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2\\
&-2\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)N_{k,t}\sigma_{Pk}+2\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{P\tau}-2N_{k,t}\sigma_{k,\tau}\Big]\\
&+\beta_1\left[\lambda_P\log\left(1-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)+\lambda_k\log\left(1+N_{k,t}\nu_k\right)+\lambda_\tau\log\left(1-\nu_\tau\right)\right]\\
&+\phi\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{k,t}\right)\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias de máximo están dadas por:

$$
0=\frac{\partial H}{\partial c_t}=\frac{\theta}{c_t}-\frac{\beta_1\left(1+\tau_c\right)}{a_t};
\tag{D.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&0=\frac{\partial H}{\partial N_{m,t}}=\frac{1-\theta}{N_{m,t}}\\
&+\beta_1\left[r_{m,t}-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P}\right]-\phi;
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&0=\frac{\partial H}{\partial N_{b,t}}\\
&\quad=\beta_1\left[r_b-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P}\right]-\phi;
\end{aligned}
\tag{D.8}
$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{k,t}}=\beta_1\begin{bmatrix} r_k-N_{k,t}\sigma_k^2+\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pk} \\ +\sigma_{k\tau}+\dfrac{\lambda_k\nu_k}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_k}\end{bmatrix}-\phi; \tag{D.9}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial \phi}=1-\left(N_{m,t}-N_{b,t}+N_{k,t}\right), \tag{D.10}$$

Sólo falta determinar los coeficientes β_0 y β_1, que están definidos en $V\left(a_t\right)$. Después de sustituir los valores óptimos $\hat{c}_t$, $\widehat{N}_m$, $\widehat{N}_b$ y $\widehat{N}_k$ en la condición H-J-B, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0=&\left(1-\delta\beta_1\right)\log\left(a_t\right)+\theta\log\left(\theta\right)+\left(1-\theta\right)\log\left(1-\theta\right)\\
&-\theta\log\left[\beta_1\left(1+\tau_c\right)\right]-\left(1-\theta\right)\log\left[\beta_1 i\left(1+\tau_y\right)\right]-\delta\beta_0\\
&+\beta_1\left[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\left(-\pi+\sigma_P^2\right)+\widehat{N}_b i\left(1+\tau_y\right)+\widehat{N}_k r_k-\frac{\hat{c}_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t}-\overline{\tau}\right]\\
&-\tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)^2\sigma_P^2+N_k^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2-2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}\\
&+2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\sigma_{P\tau}-2\widehat{N}_k\sigma_{k,\tau}\Big]\\
&+\beta_1\left[\lambda_P\log\left(1-\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)+\lambda_k\log\left(1+\widehat{N}_k\nu_k\right)+\lambda_\tau\log\left(1-\nu_\tau\right)\right]
\end{aligned} \tag{D.11}$$

lo cual implica que $\beta_1=1/\delta$ y

$$\begin{aligned}
\beta_0=&\frac{\theta}{\delta}\log\left(\theta\right)+\frac{\left(1-\theta\right)}{\delta}\log\left(1-\theta\right)-\frac{\theta}{\delta}\log\left(\frac{1+\tau_c}{\delta}\right)-\left(1-\theta\right)\delta\log\left[\frac{\left(1+\tau_c\right)}{\delta}\right]\\
&-\frac{\theta}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\left[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\left(-\pi+\sigma_P^2\right)+\widehat{N}_b i\left(1+\tau_y\right)+\widehat{N}_k r_k-\overline{\tau}\right]\\
&-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\delta^2}\Big[\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)^2\sigma_P^2+N_k^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2-2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}.\\
&+2\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\sigma_{P\tau}-2\widehat{N}_k\sigma_{k,\tau}\Big].\\
&+\frac{1}{\delta^2}\left[\lambda_P\log\left(1-\left(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b\right)\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)+\lambda_k\log\left(1+\widehat{N}_k\nu_k\right)+\lambda_\tau\log\left(1-\nu_\tau\right)\right]
\end{aligned} \tag{D.12}$$